EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

36e JAARGANG 1960/61
III - 1 NOVEMBER 1960

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang ƒ 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs ƒ 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt ƒ 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en ƒ 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Jan Huitzingstraat 43 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

PEDAGOGISCHE STUDIEDAGEN TE ARLON OVER DE BEGRIPPEN RELATIE EN FUNCTIE

Op 2, 3 en 4 juli van dit jaar werd te Arlon een stage gehouden, waar de begrippen relatie en functie het centrale thema vormden. Graag wil ik eerst de organisatie van die pedagogische studiedagen bespreken, omdat ik mij afvraag, of het door onze zuiderburen getoonde voorbeeld in ons land ook navolging verdient.

De stage werd georganiseerd door de Commissie tot hervorming van het M.O. Deze commissie zetelt op het ministerie van Onderwijs, maar is in haar werkzaamheden autonoom. Haar permanent bureau bestaat uit de directeur-generaal van het middelbaar onderwijs en twee staatssecretarissen. Een van hen, Dr. J. J. Van Hercke, behartigt de belangen van de exacte vakken. De commissie tracht door het doen plaats vinden van experimenten op de scholen, het houden van pedagogische studiedagen en het uitgeven van publikaties het onderwijs in meer moderne banen te leiden.

De bedoeling is niet de leraren iets op te dringen, maar wel alle hindernissen uit de weg te ruimen voor hen, die initiatief hebben, door het verschaffen van alle mogelijke informatie en documentatie.

Zij beschikt daarvoor over een budget van 6,5 miljoen franken. In het afgelopen jaar werden 105 stages gehouden, die in totaal 153 dagen besloegen. Deze stages werden bezocht door 4300 leraren, terwijl in geheel België ongeveer 10.000 leraren werkzaam zijn in het Rijksonderwijs. De leraren genieten vrij reizen eerste klasse en vrij logies en verblijf in de meest ruime zin.[1]) Voorwaarde is echter, dat onderbrenging in een school mogelijk is. Als de commissie tot het inzicht komt, dat bepaalde hervormingen doorgevoerd moeten worden, dan legt ze deze voor aan de Verbeteringsraad. Wat betreft pedagogische experimenten, zijn de besluiten van deze raad bindend.

---

[1]) De leraren van het vrij, het provinciaal en het gemeentelijk onderwijs genieten geen vergoeding van staatswege, omdat de betrokken organen reeds door de staat gesubsidieerd worden en in deze subsidie vergoeding voor het bijwonen van stages begrepen is. Er waren echter slechts ongeveer 50 leraren aanwezig, die niet aan staatsscholen werkzaam waren.

Betreft het besluit echter b.v. verandering van het aantal lesuren of van programma's, dan kan de minister zijn goedkeuring weigeren.

De onderhavige stage werd bezocht door 260 deelnemers uit België en nog tien gasten uit Luxemburg, Frankrijk, Duitsland, Italië en Nederland. In de normaalschool te Arlon vonden zij een ruim onderdak. Deze school telt tussen de 800 en 900 leerlingen, waarvan er 300 intern zijn. De accomodatie was zo ruim, dat de officiële gasten elk een vijfpersoonskamer tot hun beschikking kregen.

De gemaakte kosten waren 190.000 franken. Verleden jaar werd een analoge stage gehouden met als thema het begrip verzameling. De bedoeling is jaarlijks ten minste één wiskundige stage te houden en daarbij successievelijk de centrale wiskundige begrippen de revue te laten passeren en te onderzoeken, op welke wijze ze op een vanuit hoger standpunt gezien betere wijze in het onderwijs geïntroduceerd kunnen worden dan totnogtoe gebruikelijk is.

De begrippen relatie en functie werden besproken door Prof. Papy, hoogleraar aan de universiteit te Brussel. Hieronder volgt een korte weergave van de inhoud van zijn voordrachten.

Men kan het begrip relatie het beste toelichten door te beginnen met voorbeelden uit het dagelijks leven. Kies b.v. de relatie „is broer van". Stel door stippen de kinderen uit één gezin voor en door pijltjes het verbonden zijn door de relatie. In fig. 1 ziet men een familie op een dergelijke wijze uitgebeeld. Men kan zich nu afvragen,

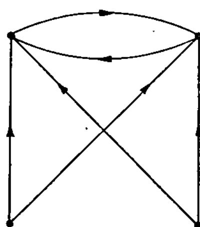


Fig. 1

of het optreden van bepaalde pijlen de aanwezigheid van andere pijlen impliceert, wie de jongens en wie de meisjes uit de familie zijn, hoe de relatie „is zuster van" uitgebeeld moet worden.

De theorie van de relaties wordt nu verder aan de hand van voorbeelden ontwikkeld. Stel in één figuur de relaties „deelbaar op" en „$\leq$" voor, de eerste relatie in blauw, de tweede in rood. Beschouw

alleen de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 10, 60. We zien, dat de aanwezigheid van een blauwe pijl de aanwezigheid van een rode met zich meebrengt. M.a.w.: deelbaar op $\subset \leqq$.

Geef in een stamboom de relatie „is vader van" door een blauwe en de relatie „is moeder van" door een rode pijl aan. Noem deze relaties V resp. M. Man kan dan uit de figuur afleiden de pijlen, die behoren bij de relaties V^2 (grootvader van vaders zijde), VM (grootvader van moeders zijde), MV en M^2. Men krijgt zo een inzicht in de betekenis van het produkt van twee relaties.

In figuur 2 zien we de verschillende manieren, waarop het verbonden zijn door een relatie 3, die het produkt is van 2 en 1, uit de

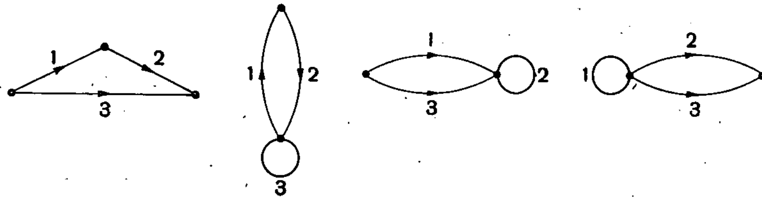
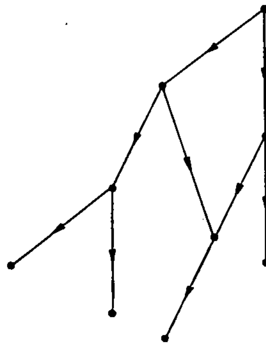


Fig. 2

verbondenheid door 2 en 1 kan voortspruiten. Een cirkeltje met b.v. een 1 ernaast geeft aan, dat het element in de relatie 1 tot zichzelf staat.

In fig. 3 is een relatie R in beeld gebracht. Men kan hieruit afleiden de figuur, die behoort bij de relaties R^2 en R^3. Tracht men nu echter het beeld van de relatie R^4 te ontwerpen, dan ziet men, dat geen enkel element door de relatie R^4 met een element verbonden is. We zien nu in, dat het zin heeft van een lege relatie te spreken. We schrijven: $R^4 = \emptyset$.


Fig. 3

Het beeld van de reciproke relatie R^{-1} krijgen we door alle pijlen in het beeld van R om te keren.

Fundamentele eigenschappen van relaties zijn: reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit. Men kan deze als volgt in figuur brengen:

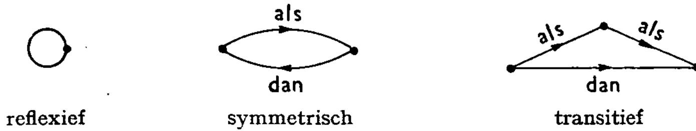


Fig. 4

en als volgt in formule:

reflexief:	$= \subset R$,
symmetrisch:	$R^{-1} = R$,
transitief:	$R^2 \subset R$.

Dan is er nog de antisymmetrie, die erdoor gekenmerkt is, dat verschillende elementen nimmer door pijlen in beide richtingen verbonden zijn. In formule: $R \cap R^{-1} \subset =$.

De relaties, die reflexief, symmetrisch en transitief zijn, zijn de zo belangrijke ekwivalenties. Als tussen de elementen van een verzameling een ekwivalentierelatie gedefinieerd is, valt deze verzameling daardoor uiteen in disjuncte onderverzamelingen, waarvan de elementen alle door de relatie verbonden zijn (fig. 5). Op grond hiervan is het mogelijk deze onderverzamelingen te bepalen door één element ervan te geven. Deze methode wordt gebruikt bij de definitie door abstractie. Zo wordt op deze manier de richting van een rechte gedefinieerd als de verzameling van alle rechten, die parallel met of identiek met deze rechte zijn.

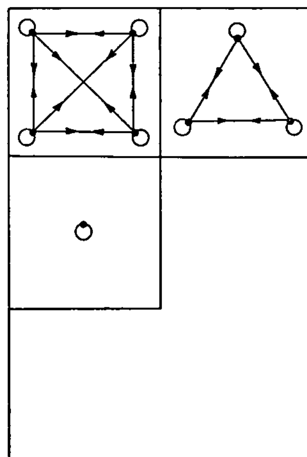


Fig. 5

We zeggen, dat $R = A \times B$, als de relatie R de relatie is, die alle elementen van A met alle elementen van B verbindt. In het bijzonder is A^2 dus de relatie, die alle elementen van A met alle elementen van A verbindt. Een ekwivalentie is dus een som van relaties van de vorm A^2. (De som van de relaties R_1 en R_2 is de relatie R_1 of R_2.)

Een bijzonder geval van de relaties vormen de functies. Een functie $A \rightarrow B$ is een toevoeging van elementen van B aan elementen van A, waarbij aan elk element van A één element van B wordt toegevoegd. Uit elke element van A vertrekt dus slechts één pijl.

Een injectie (injection) is een afbeelding van A op B, waarbij aan elk element van A een element van B wordt toegevoegd op zodanige wijze, dat aan verschillenden elementen van A verschillende elementen van B worden toegevoegd. Het is niet noodzakelijk, dat elk element van B aan een element van A toegevoegd is. Het kardinaalgetal van A is in dit geval dus kleiner dan of gelijk aan dat van B.

Een subjectie (subjection) is een afbeelding van A op B, waarbij aan elk element van A een element van B toegevoegd wordt. Het is ditmaal wel mogelijk, dat aan verschillende elementen van A hetzelfde element van B toegevoegd wordt, echter niet, dat sommige elementen van B aan geen enkel element van A toegevoegd worden. Het kardinaalgetal van A is dus groter dan of gelijk aan dat van B.

Een bijectie (bijection) of bifunctie (bifonction) is een afbeelding van A op B, die zowel een injectie als een subjectie is. (Wij spreken meestal van een éénéénduidige afbeelding.) In dit geval zijn de kardinaalgetallen van A en B aan elkaar gelijk.

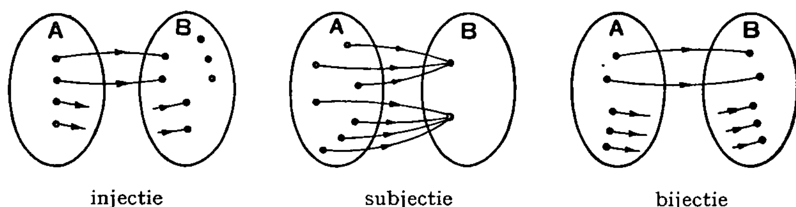


Fig. 6

Als er een injectie $A \rightarrow B$ is, die geen subjectie is, dan is er een subjectie $B \rightarrow A$, die geen injectie is.

Onderstel, dat een functie f een verzameling A afbeeldt op een (echt of niet echt) deel van een verzameling B. We kunnen de elementen van A, die hetzelfde beeld hebben, tot een klasse verenigen. Deze indeling in klassen komt dus tot stand door middel van de relatie $f^{-1}f$. Deze relatie is reflexief, symmetrisch en transitief en is dus

een ekwivalentierelatie. De verzameling A wordt erdoor verdeeld in ekwivalentieklassen.

Onderstel nu, dat a een element van A is. Dan is fa een element van B. Er bestaat dan een bijectie $f^{-1}f$ tussen de elementen fa en de ekwivalentieklassen $f^{-1}fa$. Verder bestaat er een subjectie tussen de elementen a van A en de klassen $f^{-1}fa$. En ten slotte bestaat er een injectie (die in dit geval een inclusie is) tussen de elementen fa en de elementen van B. In het navolgende schema zijn deze drie afbeeldingen weergegeven. In dit schema is fA het beeld-

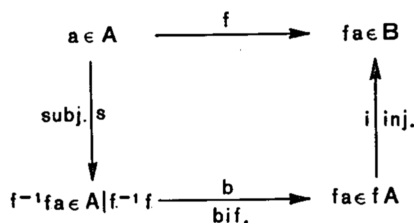


Fig. 7

gebied van A en $A|f^{-1}f$ de verzameling van klassen, waarin A door de ekwivalentierelatie $f^{-1}f$ verdeeld wordt.

Een voorbeeld is de bezorging door middel van de post. De relatie f is de relatie tussen een poststuk en zijn plaats van bestemming. Het poststuk a wordt met alle poststukken, die dezelfde bestemming hebben, verenigd tot de klasse $f^{-1}fa$. Deze vereniging komt in het schema overeen met s. De bifunctie b stelt de gezamenlijke bezorging van de poststukken met gelijke bestemming voor. De injectie i correspondeert met de relatie tussen de elementen van fA, dat zijn de plaatsen van bestemming waarvoor post aanwezig is, tot de elementen van de verzameling B van alle mogelijke plaatsen van bestemming. De functie f is dus te schrijven als produkt van s, i en b ($f = i \, . \, b \, . \, s$).

Laat men de subjectie s achterwege, d.w.z. verzuimt men de bundeling van stukken met gelijke bestemming, dan zou de postbezorging op een hoogst oneconomische wijze plaats vinden. Men ziet dus, hoe men in de praktijk van het bovengenoemde schema op een doelmatige manier gebruik kan maken.

Een wiskundig voorbeeld is de relatie tussen een punt en zijn projectie op een rechte. De subjectie s verenigt alle punten, die dezelfde projectie hebben, tot één verzameling. Deze verzamelingen zijn dus rechten. De bifunctie b is de relatie tussen deze rechten en de projecties, terwijl ten slotte de injectie i hier de identiteit is (fig. 8). Projecteren we alleen de punten van een cirkel, dan worden

door s de punten van de cirkel paarsgewijs verenigd, de bifunctie b is de relatie tussen deze paren en hun projecties, terwijl nu i een echte inclusie is (fig. 9).

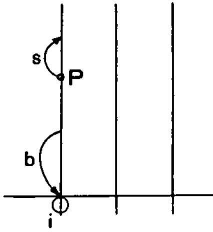


Fig. 8

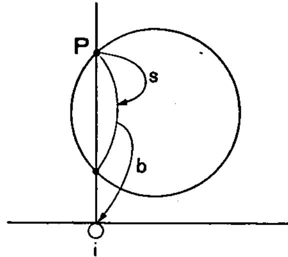


Fig. 9

De projectie is een voorbeeld van een relatie, waarvoor $R^2 = R$.

De permutaties zijn voorbeelden van bijecties. Een permutatie kan samengesteld worden uit cykels. Bij een dergelijke cykel worden enige elementen cyclisch verwisseld, terwijl de overigen invariant blijven (b.v. 123456 → 234156.)

De spreker gaf enige voorbeelden, die de lezer gemakkelijk zelf kan uitwerken, nl. het produkt van twee cyclische permutaties (dus van twee permutaties, die uit één cykel bestaan) van 3 resp. 4 elementen, het produkt van twee cyclische permutaties van de elementen van A en van B, als A en B één element gemeen hebben of twee al of niet consecutieve elementen gemeen hebben.

Daarna kwamen de oneindige kardinaalgetallen ter sprake. Als er een injectie $A \to B$ is, die geen subjectie is, en er bovendien een injectie $B \to A$ is, dan zijn A en B oneindige verzamelingen. Men kan dit als volgt inzien. Is B' het beeld van A (fig. 10), dan is volgens de eerste hypothese $B - B' \neq \emptyset$. Onderstel nu $b_1 \in B - B'$ en $b_1 \to a_1$. Als verder $a_1 \to b_2$, dan is $b_2 \in B'$ en dus zijn b_1 en b_2 verschillend. Het beeld a_2 van b_2 is verschillend van a_1, volgens de tweede hypothese. De beelden b_2 en b_3 van a_1 en a_2 zijn dan weer verschillend en verschillend van b_1, zodat we nu al drie verschillende elementen van B hebben gevonden, enz.

Het theorema van Bernstein is nu op eenvoudige manier te be-

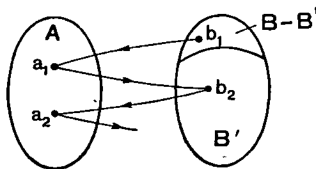


Fig. 10

wijzen. Dit theorema zegt, dat uit het feit, dat er een injectie $A \rightarrow B$ en een injectie $B \rightarrow A$ bestaat, volgt, dat A en B hetzelfde kardinaalgetal hebben.

Bewijs. Als een van de injecties tevens een subjectie is, is de stelling bewezen. Onderstel nu, dat b.v. de injectie $A \rightarrow B$ geen subjectie is (fig. 11). Begin met een element 1 van $B - B'$; aan 1 is 2 toegevoegd, aan 2 is 3 toegevoegd, enz. Al deze elementen zijn dan verschillend. Vervang nu de pijlen 23, 45, 67, . . . door pijlen 21, 43, 65, . . ., d.w.z. verhoog de rechter uiteinden in de figuur alle één plaats. Doe hetzelfde met de overige elementen van $B - B'$. Dit kan simultaan geschieden, omdat verschillende elementen van $B - B'$ verschillende beeldpunten hebben in A, enz., zodat de „kettingen" dus geen element gemeen hebben. Op deze wijze ontstaat een bijectie tussen de elementen van A en B, waaruit de juistheid van de stelling volgt.

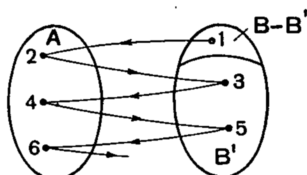


Fig. 11

Men kan het theorema van Bernstein gebruiken om te bewijzen, dat twee verzamelingen hetzelfde kardinaalgetal hebben. Zo is de verzameling van de geordende viertallen natuurlijke getallen aftelbaar, omdat er bestaat

1e. een injectie $a \rightarrow (a, a, a, a)$,

2e. een injectie $(a, b, c, d) \rightarrow 2^a 3^b 5^c 7^d$.

Volledigheidshalve vermeld ik nog, dat Prof. Papy de theorie van de functies uitvoerig toelichtte met behulp van de geometrische transformaties: symmetrie, scheve symmetrie, rotatie, translatie en samenstellingen daarvan.

Al zijn voorbeelden werden met royale afbeeldingen toegelicht, veel meer dan hier zijn weergegeven. Het bleek daarbij wel, hoe sterk verhelderend en suggestief goed gekozen figuren op dit terrein kunnen werken.

Prof. Papy heeft getracht zijn ideeën te verwerkelijken door een boek te schrijven: Premiers éléments de mathématique moderne. Dit boek is uitgegeven in gestencilde vorm; de omvang is 181 pagina's. Hij heeft hier zelf een jaar lang drie uur in de week aan scholieren les uit gegeven en daarbij bleek, dat deze hoofdstukken

uit de theorie van de verzamelingen, relaties en functies zeer wel toegankelijk waren voor de leerlingen. De moeilijkheid was een school te vinden, waar men dit onderwijs kon geven. Aan scholen, die toegang tot de universiteit gaven, was dit niet mogelijk, omdat het programma niet te zeer verstoord mocht worden. Daarom zijn de lessen gegeven aan leerlingen van een kweekschool voor kleuteronderwijzeressen, dus aan mathematisch weinig begaafde meisjes, van ongeveer 15 jaar. En juist hier bleek het onderwijs zelfs beter aan te slaan dan het gebruikelijke, hetgeen begrijpelijk is.

In een andere voordracht behandelde dezelfde spreker de continuïteit. De achtergrond van de continuïteit is, dat een kleine verandering van de oorzaak een kleine verandering van het gevolg met zich meebrengt. Een voorbeeld, waarin geen continuïteit aanwezig is, is labiel evenwicht. Mathematisch kan men de continuïteit van een functie het best verduidelijken door een tweedimensionale voorstelling. In fig. 12 is fp het beeldpunt van p. Wil de functie f continu in p zijn, dan moet het mogelijk zijn de functiewaarde binnen een omgeving van fp te houden door de eis te stellen, dat p binnen een bepaalde omgeving van p blijft.

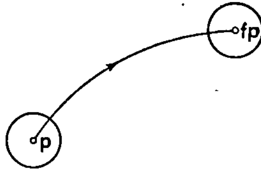


Fig. 12

Het vage punt in deze omschrijving is de term „omgeving''. Onder een omgeving van p verstaan we een verzameling, die als deel heeft een cirkelschijf (zonder rand), waarvan p middelpunt is. Men kan ook zeggen, dat V een omgeving van p is, als er een open verzameling bestaat, die p bevat en deel van V is.

Voorbeelden van continue functies zijn translatie en symmetrie. Verder is, als f en g continu zijn, ook de samengestelde functie $f \circ g$ continu. Hieruit volgt, dat de rotatie eveneens continu is, omdat ze het produkt is van twee spiegelingen. De projectie van een punt op een rechte is een continue functie van dat punt. De cosinus is dus een continue functie van een punt op de eenheidscirkel. Dit punt is weer een continue functie van de booglengte (van een vast beginpunt op de cirkel tot het punt gemeten). En dus is de cosinus een continue functie van een getal.

Opmerking verdient, dat de continuïteit hier gedefinieerd is zonder van het begrip limiet gebruik te maken. We kunnen nu defini-

eren: $\lim_{x \to a} fx = b$, als f een continue functie is in a en $fa = b$. Het wezenlijke van de continuïteit en van limieten wordt op deze wijze duidelijker blootgelegd dan op de traditionele manier.[1])

Blijft over de limieten van het type: $\lim fx$, als x nadert tot oneindig. Deze kunnen niet op dezelfde wijze behandeld worden, want oneindig is geen element van de verzameling, waar fx gedefinieerd is. Het heeft dus evenmin zin te spreken van een omgeving van oneindig. Om nu een analoge behandelingswijze op te sporen, analyseren we eerst het begrip omgeving. Kenmerken van het begrip omgeving van x (V_x) zijn:

als $P \in V_x$ [2]) en $P \subset Q$, dan is $Q \in V_x$,
als $P \in V_x$ en $Q \in V_x$, dan is $P \cap Q \in V_x$.

We definiëren nu een filter Φ als een verzameling van verzamelingen met de eigenschappen:

als $P \in \Phi$ en $P \subset Q$, dan is $Q \in \Phi$,
als $P \in \Phi$ en $Q \in \Phi$, dan is $P \cap Q \in \Phi$,
$\emptyset$ is geen element van Φ.

Een voorbeeld van een filter vormen de verzamelingen natuurlijke getallen, waarvan het complement een eindige verzameling is (vgl. de ,,omgevingen van oneindig'').

We kunnen nu spreken van de limiet van fx t.o.v. een filter. Deze limiet is a, als er bij elke omgeving V van a een element A van het filter bestaat, waarvoor geldt $fA \subset V$. De gewone limietdefinitie is hiervan dus een bijzonder geval.

Bij een functie, waarvan het argument een verzameling A doorloopt, heeft het eerst zin van continuïteit te spreken, zodra gedefinieerd is, wat men in A onder een open verzameling verstaat. [3])

Men kan nu ook spreken van een continue functie van meer dan één variabele. Neem als voorbeeld de functie $x + y$. Dit is een afbeelding van de verzameling $R \times R$, d.w.z. van de paren reëele getallen, op de verzameling R. We moeten nu vastleggen, wat we verstaan onder een open verzameling in $R \times R$. We verstaan hieronder b.v. de verzameling van de paren (x, y), waarvoor geldt

---

[1]) Is fx niet continu in a, dan wordt liet $\lim_{x \to a} fx = b$ het volgende bedoeld: de functie f_1x, waarvoor geldt $f_1x = fx$, als $x \neq a$, en $f_1a = b$, is continu in a.

[2]) Lees: als P een omgeving van x is (en niet: als P element is van een omgeving van x).

[3]) Men kan dit tot zekere hoogte op willekeurige wijze doen. Men moet er echter voor zorgen, dat de doorsnede van twee open verzamelingen, die niet disjunct zijn, open is.

$a_1 < x < a_2$ en $b_1 < y < b_2$. Hiermee is dus meteen het begrip omgeving vastgelegd. De functie $x + y$ is nu continu. Is immers $a + b = c$, dan is er bij elke omgeving van c een omgeving van (a, b), met de eigenschap, dat bij een tot deze omgeving behorend punt (x, y) een functiewaarde behoort, die binnen de gegeven omgeving van c ligt.

Verder werden bij wijze van demonstratie enige lessen gegeven aan leerlingen van de kweekschool te Arlon door de heren Debot, Bosteels en Delmotte over relaties, tweewaardige logische verbindingen (waarheidstafels van „en", „of", „impliceert", „ekwivalent") en over het begrip continue functie. Bovendien was een middag gewijd aan een bespreking van de resultaten, die leraren gehad hadden met het in praktijk brengen van de resultaten van de vorige studieconferentie over verzamelingen.

P. G. J. VREDENDUIN

DE FORMULE $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

door

J. WICHERS

Amsterdam

In de vlakke meetkunde bewijst men de stelling:

Als in driehoek ABC hoek C gelijk is aan 120°, en d is de bisectrix van die hoek, dan geldt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{d}.$$

Het bewijs is eenvoudig, en kan bijvoorbeeld als volgt worden geleverd:

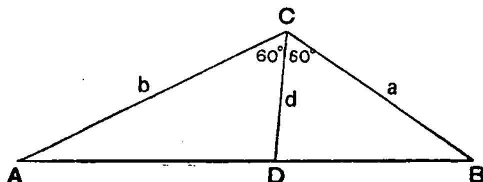


Fig. 1

De hoeken bij C van de driehoeken BDC, ADC en ABC (fig. 1) zijn respectievelijk 60°, 60° en 120°; hun oppervlakken verhouden zich dus als ad, bd en ab. Omdat de som van de oppervlakken van de eerste twee gelijk is aan het oppervlak van de derde, is ook

$$ad + bd = ab,$$

waaruit vogt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{d}.$$

Deze formule vertoont een opmerkelijke overeenkomst met de in de titel genoemde formule uit de natuurkunde, en geeft aanleiding tot een eenvoudige constructie van één van de drie grootheden v, b, f, als twee ervan bekend zijn.

In figuur 2 is $OF = f$, de hoeken POF en QOF zijn 60°. Neemt men nu op de rechte OP een punt V zó, dat $OV = v$, en is B het snijpunt van VF met OQ, dan is $OB = b$.

Laat men V de rechte OP doorlopen, dan ziet men gemakkelijk, hoe B zich langs OQ beweegt, m.a.w. het verband tussen v en b is direct uit de figuur af te lezen.

Is f negatief, dan neemt men F aan de andere kant van O.

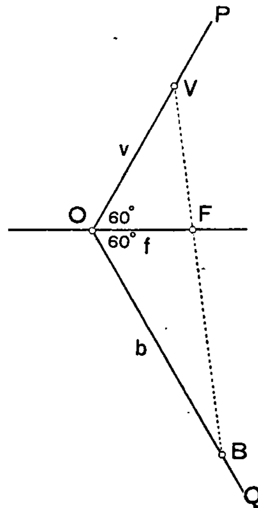


Fig. 2

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

XLVII. *Van de hoek tussen een lijn en een vlak.*

Het vlak α waarvan in de projectiefiguur de eerste en de tweede doorgang samenvallen (in bepaalde milieus het „gehate vlak" genoemd) neemt in de beschrijvende meetkunde een geheel eigen plaats in. Zijn hoek φ te bepalen met een lijn l wier projecties beide met deze doorgangen samenvallen mag een klassieke examenopgave heten. Voert men de constructie uit dan valt het op, dat zij, hoe men het schrale gegeven wendt of keert, een uitgesproken onaanzienlijk hoekje oplevert. Nu staat het op grond van de feiten vast dat l zeker niet loodrecht op α kan staan. Aan de andere kant zal, als de alles betekenende lijn a horizontaal of verticaal loopt, l in α liggen of er evenwijdig mee zijn, zodat φ gelijk aan nul is. Wij bepalen de maximale waarde van φ.

Maakt a een hoek β met de X-as en kiest men de oorsprong in het snijpunt dan is de vergelijking van de eerste doorgang $y = -mx$ en die van de tweede $z = mx$, waarbij $m = \operatorname{tg} \beta$. De vergelijking van α luidt dus

$$mx + y - z = 0$$

en zijn normaal heeft de richtingsgetallen $(m, 1, -1)$. De lijn l, snijlijn van de projecterende vlakken, heeft de richtingsgetallen $(1, -m, m)$ zodat voor φ geldt

$$\sin^2 \varphi = \frac{m^2}{(m^2 + 2)(2m^2 + 1)} \tag{1}$$

Men kan deze betrekking ook uit de constructiefiguur afleiden. Het vlak α staat loodrecht op het bissectricevlak γ van de tweede en vierde ruimtehoek en l ligt in dit vlak; φ is bijgevolg de hoek tussen l en de snijlijn s van α en γ. Slaat men γ (fig. 1) in het tafreel neer dan valt l_n langs AC en s_n langs AD. Is $OA = 1$, $OB = m$, dan $OC = m\sqrt{2}$ en $OD = \frac{1}{2}m\sqrt{2}$. Hieruit volgt $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)$, waarbij $\operatorname{tg} \varphi_1 = m\sqrt{2}$ en $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{2}m\sqrt{2}$, zodat

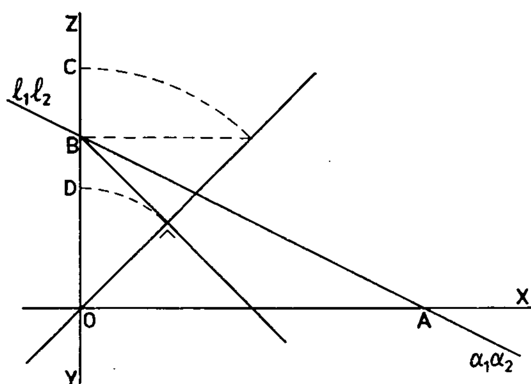


Fig. 1

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m\sqrt{2}}{2(m^2 + 1)} \tag{2}$$

een betrekking die overeenkomt met (1).

Uit (1) blijkt dat φ niet verandert als m door $-m$, dus β door haar supplement wordt vervangen — wat vanzelf spreekt; ook verandert φ niet als men m door $1/m$ vervangt en dus β door haar complement. Dit doet reeds vermoeden dat het maximum van φ voor $m^2 = 1$ wordt bereikt en door de schrijfwijze

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2\left(m^2 + \dfrac{1}{m^2}\right) + 5}$$

wordt dit onmiddellijk bevestigd. Wij hebben dus: *de grootste waarde φ_m van de hoek tussen l en α wordt verkregen als a een hoek $\pi/4$ met de X-as maakt, terwijl voorts*

$$\sin \varphi_m = \tfrac{1}{3}$$

De tafels leren dat $\varphi_m = 0{,}34$ radialen bedraagt, een bedrag dat nauwelijks boven de sinuswaarde uitkomt, terwijl $\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0{,}35$ oplevert. De hoek φ_m is weinig meer dan één vijfde van een rechte hoek.

DIDACTISCHE REVUE

L'Enseignement Mathematique, Revue Internationale, *Organe officiel de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathematique;*

Fondée en 1899 par H. Fehr et C. A. Laisant

Editeur et secrétariat: Institut de Mathématiques de l'Université de Genève.

Er is naar mijn mening voldoende reden om een afzonderlijke revue te wijden aan dit tijdschrift dat door zijn veelzijdige en rijke inhoud meer dan een halve eeuw lang het onderwijs in de wiskunde op zo velerlei niveau heeft gediend en dat zich in deze periode een internationale faam heeft verworven. Het is jammer dat het tijdschrift in de Nederlandse wiskundeleraren nog niet de belangstelling heeft weten te veroveren die het verdient; het is zelfs nog niet opgenomen in de door Wimecos georganiseerde tijdschriften-circulatie. Omdat het nemen van een persoonlijk abonnement voor vele belangstellenden op financiële bezwaren zou kunnen stuiten (de abonnementsprijs is 20 Zwitserse franken per jaar) dient m.i. overwogen te worden het tijdschrift in de portefeuille op te nemen. Dit zal stellig zonder bezwaar kunnen gebeuren, zodra zich een voldoend aantal belangstellenden heeft opgegeven bij de heer G. J. Boost, Parklaan 107A, Rosendaal (N. Br.), die de verzorging van de circulatie op zich heeft genomen.

Misschien kan onderstaand overzicht ertoe bijdragen de belangstelling voor dit welverzorgde internationale tijdschrift bij een aantal lezers van Euclides op te wekken.

L'Enseignement Mathématique kwam in 1899 tot stand op initiatief van H. Fehr en C. A. Laisant, waarvan in het bijzonder de eerstgenoemde zijn sporen heeft verdiend bij het tot stand brengen en onderhouden van internationale contacten op mathematisch terrein. Met Felix Klein en Greenhill vormde hij het driemanschap, in 1908 aangewezen door het Internationaal Mathematisch Congres te Rome, dat de Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (C.I.E.M., I.C.M.I., I.M.U.K.) tot stand bracht. Voor ieder die zich interesseert voor de hervormingen in de

diverse landen tot stand gekomen in de eerste helft van de 20e eeuw, vormen de opvolgende jaargangen van *L'Enseignement Mathématique* een onuitputtelijke bron van gegevens.

Nadat de laatste wereldoorlog de verschijning van het tijdschrift ernstig had doen stagneren, werd in 1955 een tweede serie geopend, waarvan nu vijf jaargangen compleet zijn. Doel van de redacteuren in 1899 was: „. . . créer une sorte de correspondance mutuelle continue entre les hommes qui ont consacré leur vie a cette noble mission: l'éducation mathématique de la jeunesse.".

De vele jaargangen hebben geleerd, hoezeer de redacteuren erin geslaagd zijn hun tijdschrift te maken tot een internationaal forum. Wetenschappelijk verantwoorde bijdragen betreffende alle geledingen van het onderwijs in diverse landen werden opgenomen. Zowel de belangen van het universitair onderwijs als van het V.H.M.O. werden behartigd. Naast historische, didactische en schoolorganisatorische bijdragen werd een belangrijke plaatsruimte beschikbaar gesteld voor oorspronkelijke, zuiver wetenschappelijke artikelen, waarbij men uitging van de premisse, dat onderwijs en wetenschappelijk onderzoek niet gescheiden dienen te worden.

Doordat het tijdschrift tevens officieel orgaan is van de C.I.E.M. worden alle circulaires, rapporten, verslagen, en organisatorische bijzonderheden van de C.I.E.M. opgenomen. De tegenwoordige leiding berust bij de professoren A. Chatelet, Parijs en J. Karamata, Genève.

De bedoelingen van de tweede reeks van het tijdschrift werden in 1955 als volgt geformuleerd:

> „This second series will be devoted to the reform and development of mathematical instruction; it will publish articles focusing on and explaining modern theories in a manner comprehensible to non-specialised mathematicians; deal with the arrangement and organisation of teaching; study the psychological formation of mathematical ideas; and publish accounts of the work done and surveys carried out by the I.C.M.I. A bibliographical index will be included in each number".

Dit hier bedoelde driemaandelijkse overzicht geeft van nieuw verschenen leerboeken die van internationaal belang zijn een gedetailleerde inhoudsopgave en vermeldt tevens alle mathematische tijdschriften.

De nu volgende opsomming van titels van artikelen uit de jaargangen I—V dient slechts om een indruk te geven van wat er geboden wordt: de opsomming is uit de aard der zaak onvolledig.

I. Henri Fehr (1870—1954), *sa vie et son oeuvre*; Symposium dédié à la mémoire de Henri Fehr;

H. Lebesgue, L'oeuvre mathématique de Vandermonde;
A. Reymond, A la mémoire de Pierre Sergescu;
B. L. van der Waerden, Les mathématiques appliquées dans l'antiquité;
G. Kurepa, Rapport général sur l'enquête de la C.I.E.M.;
A. Lichnerowicz, La communauté des savants;
E. Kamke, Die Rolle der Mathematik im heutigen Leben;
G. Darmois, Rôle du mathématicien dans la vie contemporaine;
D. van Danztig, The function of mathematics in modern society and its consequences for the teaching of mathematics;
G. Ascoli, La funzione delle matematica e del matematico nella vita contemporanea;
A. M. Gleason, The expanding role of mathematics;
H. Hadwiger et H. Debrunner, Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie der Ebene;
O. Weinberger, Über die Anwendung der Mathematik auf Staatswissenschaften;
B. van der Pol, Démonstration élémentaire de la relation $\theta_3{}^4 = \theta_0{}^4 + \theta_2{}^4$, entre les différentes fonctions de Jacobi;
A. Ostrowski, Sur les critères de convergence et divergence dus à V. Ermakof.

II. H. Freudenthal, Relations entre l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire en Hollande;
O. Frostman, Range of mathematical education in Swedish grammar schools with regard to the examinationpaper;
M. Villa, L'enseignement des mathématiques en Italie aux jeunes gens de 16 à 21 ans;
E. A. Maxwell, From secondary school to university;
H. Milloux, Georges Valiron (1884—1954);
J. E. Hofmann, Über Jakob Bernoulli's Beiträge zur Infinitesimalrechnung;
H. Lebesgue, De l'arithmétique à l'algèbre et à l'analyse mathématique;
G. Choquet, Fonctions analytiques et surface de Riemann;
J. Braconnier, L'analyse harmonique dans les groupes abéliens.

III. H. Behnke, La tension entre l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire en Allemagne;
L. Godeaux, Le centre belge de recherches mathématiques;
A. Denjoy, L. Félix et P. Montel, Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l'homme;
D. Harkin, On the mathematical work of François-Edouard-Anatole Lucas;
H. Lebesgue, Hubert et Jordan, Roberval et Ramus, professeurs de mathématiques au Collège de France;
H. Lebesgue, Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan (1838--1922);
H. Lebesgue, Notice sur René-Louis-Baire;
P. Huber, Bemerkungen über mathematische Keilschrifttexte;
A. Chatelet, Réimpression du traité des substitutions et des équations algébriques de Camille Jordan;
G. Poitou, Sur la fonction exponentielle complexe;
W. Feller, The numbers of zeros and of changes of sign in a symmetric random walk;
H. Hadwiger et H. Debrunner, Choix de quelques problèmes de géométrie combinatoire dans le plan;
C. Chevalley, et A. Weyl, Hermann Weyl (1885—1955);

H. Lebesgue, Sur une construction du polygone régulier de 17 côtes, due à André-Marie Ampère;
R. C. H. Tanner, Sur la nullité.

IV. J. J. Burckhardt, Zum mitteralterlichen Rechnen in der Schweiz;
K. R. Biermann, Iteratorik bei Leonard Euler;
P. Erdös, Sur certaines séries à valeur irrationnelle;
J. E. Hofmann, Zur elementaren Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene;
K. Lamotke, Der Jordansche Polygonsatz in der affinen Geometrie;
W. Sierpinski, Sur les nombres premiers de la forme $n^n + 1$;
W. Sierpinski, Sur quelques problèmes concernant les points aux coordinées entières;
A. Schinzel, Sur l'existence d'un cercle passant par un nombre donné de points aux coordinées entières;
G. Valiron, Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes;
Pham Mau Quan, Sur le principe de Fermat.

V. H. Behnke, Die wissenschaftlichen Grundlagen der Schulmathematik;
H. Freudenthal, A comparative study of methods of initiation into geometry;
Howard Fehr, The mathematics education of youth — a comparative study;
W. Servais, Annexe au rapport sur l'étude comparée des méthodes d'initiation à la géométrie;
S. S. Cairns, Scientific foundation of mathematics on the secondary schoollevel;
P. Dubreil, Rapport sur les bases scientifiques des mathématiques dans l'enseignement du second degré;
H. E. Vaughan, Le projet de la commission de réforme de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires, instituée par l'université de l'Illinois;
H. Behnke, Tätigkeitsbericht der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission;

F. Drenckhahn, Der mathematische Unterricht der 6- bis 15-jährigen Jugend in der Bundesrepublik Deutschland;
G. Kurepa, Scientific foundations of school mathematics;
G. Kurepa, Des principes de l'enseignement mathématique;
A. W. Tucker, Programme de mathématiques de la Commission des mathéma tiques du conseil des examens d'admission dans les collèges;
J. P. Kahane, Sur l'exemple donné par M. de Rham d'une fonction continue sans dérivée;
R. P. Boas, On some versions of Taylor's theorem;
A. Chatelet, Points rationels sur certaines courbes et surfaces cubiques;
J. Karamata, Divergence de la série harmonique d'après Mengoli;
D. Mazkewitsch, Art des Kegelschnittes, den zwei projektive Gebilde erzeugen;
W. Sierpinski, Sur quelques problèmes non résolues d'arithmétique;
H. Wendelin, Zwei Limitationssätze über Bereich-Integrale.

Tot slot merken we op dat tal van bijdragen opgenomen in „l'Enseignement Mathématique" in afzonderlijke monografieën zijn uitgegeven. Tot dusver zijn acht nummers verschenen. Ze zijn uitgegeven, evenals het tijdschrift zelf, door het „*Institut Mathématique de l'Université de Genéve*".

Joh. H. Wansink

EINDEXAMEN-LUXEMBURG 1960 [1])

Enseignement classique pour garçons

I. Section gréco-latine et sous-sections latines A et C.

a. Algèbre et géométrie.

1. Calculer la limite de l'expression

$$\frac{a + x - \sqrt{a^2 + x}}{\sqrt{x + a^2} - a} \quad \text{pour } x = 0, \text{ si } a \neq 0. \qquad \text{(6 points)}$$

2. Calculer la dérivée de

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}} \qquad \text{(9 points)}$$

3. Evaluer

$$\int \sin^7 x \, dx \qquad \text{(9 points)}$$

4. La petite base d'un trapèze isocèle a 7 m et chacun des côtés obliques 15 m. Déterminer la longueur de la grande base pour que l'aire du trapèze soit maximum. (10 points)

5. Calculer l'aire comprise entre les courbes $y = -0,5x^2 + 2,5x$ et $y = \frac{1}{32}x^3$ dans le premier quadrant. (10 points)

6. Trouver, par intégration, le volume du segment sphérique à une base de rayon r et de hauteur a. (10 points)

b. Trigonométrie.

1. Rendre calculable par logarithmes l'expression suivante:

$$\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a \qquad \text{(15 points)}$$

2. Résoudre l'équation.

$$3\left(\cos x - \frac{1}{2\cos x}\right) = \sin x \qquad \text{(15 points)}$$

3. Pour déterminer la distance entre deux points inaccessibles A et B on choisit une base d'opération CD longue de 150 m et on mesure les angles BCD = 40°, ACD = 69°, ADC = 38° 30′ et BDC = 70° 30′. Calculer la distance AB et l'angle que fait le prolongement de AB avec le prolongement de CD. (24 points)

---

[1]) Door vriendelijke bemiddeling van Dr. A. Gloden ontvangen. Zie ook Euclides 35, blz. 201.

II Sous-section latine C

(section des sciences naturelles)

a. Calcul différentiel et intégral

1. Calculer les dérivées suivantes:

$$a.\ y = \frac{e^{ax}(a. \sin bx - b. \cos bx)}{a^2 + b^2};$$ (9 points)

$$b.\ y = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - x}{\sqrt{a^2 + x^2} + x}\right);$$ (9 points)

$$c.\ y = \ln\sqrt{\frac{1 - \cos x}{\sin x}} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$ (9 points)

ln = logarithme naturel (3 × 9 points)

2. Intégrer:

$$a.\ \int x^3 \ln x \cdot dx;$$ (7 points)

$$b.\ \int e^x \sin 2x \cdot dx;$$ (10 points)

$$c.\ \int_0^1 \frac{x^2 - 5x + 3}{(x + 1)(x^2 - 4x + 4)} dx.$$ (10 points)

b. Géométrie Analytique

1. Une conique est définie par l'équation

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0.$$

a) genre de cette conique;
b) construction;
c) équations des tangentes parallèles à l'axe des x. (18 points)

2. On donne le cercle

$$(C) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0.$$

a) Trouver les équations des tangentes menées à ce cercle par l'origine des coordonnées.
b) Calculer l'angle de ces tangentes.
c) Montrer que la corde joignant les deux points de contact est perpendiculaire à la droite passant par l'origine et le centre du cercle (C). (18 points)

3. On joint le foyer F de la parabole $y^2 = 16x$ au point P situé sur la parabole, ce point ayant une abscisse égale à 9 et une ordonnée positive. Etablir les équations des tangentes à la parabole aux extrémités de la sécante FP. (18 points)

III. Sous-Section Latine B.

(Mathématiques spéciales)

a. Algèbre et calcul différentiel et intégral.

1. Dériver les fonctions suivantes:

a) $y = e^{\operatorname{tg} 3x}$ (3 points)

b) $y = \dfrac{2x^2}{(x-1)^2\sqrt{2x+4}}$ (3 points)

c) $y = \sqrt{e^{2x}} - \operatorname{Log}(\sqrt{e^{2x}} - 1)$ (3 points)

2. Intégrer les expressions suivantes:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}$ (3 points)

b) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$ (3 points)

c) $\displaystyle\int e^{ax} \cos nx \, dx$ (3 points)

3. Etudier les variations de la fonction

$$y = \frac{2x^2}{1+x^4}$$ (9 points)

Faire le graphique sans les points d'inflexion).

4. On considère un fût comme un segment à deux bases d'un ellipsoide de révolution.
Les dimensions mesurées à l'intérieur sont les suivantes:
distance des deux bases: 2,4 m
diamètre des deux bases: 1,6 m
diamètre du plus grand cercle: 2 m
Quelle est la capacité de ce tonneau? (exprimée en litres) (9 points)

5. Etudier la convergence des séries entières suivantes

a) $1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + \ldots$ (3 points)

b) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$ (3 points)

c) $1 + \dfrac{x^2}{2^2\sqrt{2}} + \dfrac{x^4}{2^4\sqrt{3}} + \dfrac{x^6}{2^6\sqrt{4}} \ldots$ (3 points)

6. On donna une sphère de rayon R. Etudier les variations de l'aire totale du cone circulaire droit circonscrit à cette sphère. (9 points)

b. Géométrie analytique.

1. Trouver l'équation du cercle qui passe par le point (0,8), dont le centre se trouve sur la droite $2x - y - 1 = 0$ et qui coupe orthogonalement le cercle $x^2 + y^2 = 16$. (10 points)

2. On donne $\rho = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$

a) Calculer l'excentricité et déterminer la nature de la courbe. Construire la courbe en coordonnées polaires. (8 points)

b) Ramener l'équation à sa forme la plus simple en coordonnées rectangulaires. (7 points)

3. Transformer l'équation

$$36x^2 - 24xy + 29y^2 + 96x - 22y - 115 = 0$$

par translation et par rotation des axes et construire la courbe. (15 points)

4. Etant donné un point $P_1(x_1, y_1)$ de l'hyperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, on considère le diamètre passant par ce point.
   a) Trouver l'équation du diamètre conjugué et ses extrémités sur l'hyperbole conjuguée. (9 points)
   b) Démontrer que l'aire du parallélogramme ayant pour côtés les tangentes aux extrémités des deux diamètres conjugués est égale à $4ab$. (6 points)

c. Compléments de géométrie plane.

1. La droite d'EULER ou droite des 4 points. (9 points)
2. Etudier le produit des 2 homothéties $H(O_1; k_1)$ et $H(O_2; k_2)$; ce produit est-il commutatif? (15 points)
3. Construire un cercle passant par 2 points donnés A et B et tangent à un cercle donné (C); analyse, construction et discussion. (15 points)
4. Etudier l'inverse d'un cercle passant ou ne passant pas par le centre d'inversion; montrer que 2 cercles quelconques peuvent être considérés l'un comme l'inverse de l'autre dans 2 inversions que l'on précisera; que se passe-t-il si les cercles sont égaux, tangents et concentriques? (15 points)

II. Enseignement secondaire pour jeunes filles

a. Algèbre

1. Calculer les derivées des fonctions suivantes:

1) $y = (x - \sqrt{1 - x^2})^2$ (6 points)

2) $y = \dfrac{x\sqrt{x^2 + 4}}{x^2 - 4}$ (6 points)

3) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ (6 points)

2. Etudier les variations de la fonction suivante, si x varie de $-\infty$ à $+\infty$

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

Représenter la fonction graphiquement. (18 points)

3. Dans un cône de révolution de rayon $r = 12$ cm et de hauteur $h = 15$ cm inscrire un cylindre droit. Parmi tous les cylindres possibles trouver celui de volume maximum. (18 points)

b. Géométrie

1. *Enoncer* le théorème sur l'aire engendrée par un segment de droite tournant autour d'un axe situé dans un même plan et ne le traversant pas. — En déduire l'aire de la zone sphérique. (18 points)
2. Dans un segment sphérique à une base, l'aire de la calotte est $1\frac{1}{2}$ fois celle de la base. Le rayon de la sphère mesure 30 cm. Trouver la surface totale et le volume du segment. (18 points)

3. A une sphère on circonscrit un cône équilatéral (génératrice du cône = diamètre de la base).

Trouver 1) le rapport des volumes des deux corps;
2) le rapport de leurs surfaces totales. (18 points)

c. Trigonométrie

1. Rendre calculable par logarithmes l'expression suivante:

$$y = \cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a$$

Calculer ensuite sa valeur pour $a = 10° 25'$. (18 points)

2. Résoudre l'équation: $\cos 2x - \cos x \cdot \cos 3x = 0$ (18 points)

3. Pour mesurer la hauteur du sommet S d'une montagne au-dessus d'un plan horizontal, on dispose dans ce plan de 2 points A et B distants de 3,2 km. L'angle SAB mesure 27° 40′ et l'angle SBA mesure 53° 55′. Le sommet S est vu du point B sous un angle d'élévation de 36° 45′. Calculer la hauteur de la montagne. (18 points)

BOEKBESPREKING

Kurt Vogel, *Vorgriechische Mathematik*. Teil II. Die Mathematik der Babylonier. Mathematische Studienhefte für den mathematischen Unterricht an Höheren Schulen, herausgegeben von Dr. Hermann Athen und Dr. Georg Wolff. Hermann Schroeder Verlag KG, Hannover. Verlag Ferdinand Schöningh, Paderborn.

Wij hebben hier destijds (jaarg. 34, 1958—'59, p. 254) de aandacht gevestigd op het eerste deeltje van het werk *Vorgriechische Mathematik* van Prof. Kurt Vogel, dat aan Egyptische wiskunde gewijd was. Thans is ook het tweede deeltje verschenen, dat de wiskunde der Babyloniërs behandelt. Man kan hiervan al het goeds herhalen, dat van het eerste gezegd is: beheersing van de gehele litteratuur, heldere en boeiende uiteenzetting, mooie uitvoering. Tezamen vormen de twee deeltjes een uitstekende samenvatting van het tegenwoordige weten over de voor-Griekse wiskunde. Als men hun inhoud vergelijkt met wat een veertig jaar geleden over het onderwerp bekend was, is er alle aanleiding zich over de bereikte vooruitgang te verheugen.

Na een inleiding over de ontwikkeling van het schrift en een betoog, dat de wezenlijke inhoud der babylonische wiskunde sumerisch en niet akkadisch van oorsprong is, wordt een overzicht van de tal- en maatstelsels gegeven met een verklaring van het ontstaan van het sexagesimale positiesysteem. Vervolgens wordt de rekentechniek behandeld en het theoretisch karakter der babylonische arithmetica toegelicht aan de onderwerpen reeksen en pythagoreische getaltripels (de befaamde vondst van het tablet Plimpton 322). Na een behandeling van diverse algebraïsch behandelde problemen uit het dagelijks leven wordt uitvoerig over babylonische algebra gesproken (ook een van de typerende eigenaardigheden van de babylonische wiskunde). De rest van het werk is aan de meetkunde gewijd. Een litteratuurlijst en een register van namen en personen besluiten het waardevolle boekje, dat wij gaarne ter bestudering aanbevelen aan allen die in de geschiedenis der wiskunde belangstellen.

E. J. Dijksterhuis

Dr. Th. G. D. Stoelinga en Dr. M. G. van Tol, *Leerboek der Gonio- en Trigonometrie*. 80 blz. Vijfde druk, 1959. Uitg. N.V. Uitgevers-maatschappij W. E. J. Tjeenk Willink, Zwolle. Prijs ing. *f* 3.20; geb. *f* 3.80.

De nieuwe druk bevat de in het nieuwe leerplan voorgeschreven stof, begint daarbij met een herhaling van het in de meetkunde geleerde en sluit met een extraatje: een kort hoofdstukje over cyclometrische functies. In de functiehoofdstukken wordt blijkbaar op de resultaten van het algebraonderwijs gerekend, sommige extremen worden tenminste zonder toelichting van het procédé per differentiaalrekening opgespoord. Het doet wat komisch aan, dat het eerste geval de extremen van sin x en cos x betreft, die als ware ontdekkingen met veel cursivering gepresenteerd worden, hoewel toch het resultaat direct bij de definitie dezer functies al had kunnen worden vastgesteld en nauwelijks dieper ligt dan de eigenschappen die van de afgeleiden moesten worden gebruikt.

Bezwaar heb ik tegen de definitie van de goniometrische verhoudingen voor algemene hoeken, ze worden via projectie van een punt op de eenheidscirkel op zekere ,,assen" als lijnstukken gedefinieerd. Definitie als verhoudingen van coördinaten lijkt mij te prefereren.

Overigens is het een bruikbaar boekje, vooral nu er praktisch geen limieten in staan. Op dat gebied blijken de schrijvers nog steeds geen betrouwbare gidsen, getuige het feit, dat ze (blz. 20) aan tg 90° ,,de waarde $+\infty$ of $-\infty$" (dus liefst twee ,,waarden" tegelijk) toekennen. De ,,beschouwing, die hen daartoe brengt" doet zien, dat ze op dit stuk de laatste twintig jaar niet veel verder gekomen zijn.

Haren (Gr.) J. Koksma

Ir. G. L. Ludolph en Ir. R. J. Legger, *Mechanica voor het U.T.O.*, deel A; 201 blz., geb. *f* 6.90; 1959; J. B. Wolters-Groningen.

Het wiskundig peil van de leerlingen voor wie dit boek in de eerste plaats bestemd is, noodzaakte de auteurs tot het gebruiken van eenvoudige taal en tot het ontwijken van enige wiskundige moeilijkheden. Zij hebben de eenvoud o.a. trachten te bereiken door een vermijden van limietbeschouwingen. Zo leiden ze de formule voor de verplaatsing bij een eenparig versnelde beweging af door stilzwijgend aan te nemen dat de gemiddelde snelheid gedurende de tijd $(0, t)$ gelijk is aan het gemiddelde van de begin- en de eindsnelheid. Voorts wordt bij de behandeling van de centripetale versnelling de versnelling geïnterpreteerd als de snelheid, waarmee de snelheid verandert. Bij de behandeling van het evenwicht van niet-evenwijdige krachten (§ 45 en § 46) wordt niet voldoende onderscheid gemaakt tussen de geformuleerde evenwichtsvoorwaarden en hun omkeringen.

Overigens is de moeilijke stof duidelijk en indringend behandeld.

Deel A bevat de bewegingsleer, de leer der krachten, de leer van het evenwicht en de kinematica.

Er is een ruime voorraad van vraagstukken en het boek bevat 249 met zorg getekende figuren.

De technische uitvoering van het boek staat op hoog niveau.

Joh. H. Wansink

F. S. Groen en Dr. H. van Rossum, *Leerboek der Mechanica voor h.b.s. en lyceum*, 199 blz, ing. *f* 5.90, geb. *f* 6.90; 1956; N.V. W. J. Thieme & Cie-Zutphen.

Dit leerboek der mechanica kenmerkt zich door zorgvuldige behandeling van de theorie, door een groot aantal uitgewerkte voorbeelden, door een ruime keuze van vraagstukken (375 stuks, waaronder een goot aantal examenopgaven), door duidelijke figuren en door een overzichtelijke samenvatting van de theorie aan het einde van het boek.

In een aanhangsel zijn ondergebracht: de soorten van evenwicht voor een massapunt, de botsing en de afleiding van de formule voor de centripetale versnelling bij een niet-eenparige beweging.

De auteurs hebben ernaar gestreefd vectoren stelselmatig aan te duiden door een pijltje boven de gebruikte letter. De dynamica is zo ver mogelijk naar voren geschoven, onmiddellijk na de 9 bladzijden ruimte innemende bespreking van de beweging langs een rechte lijn. De harmonische beweging wordt reeds in § 9 behandeld.

Mijn waardering voor dit leerboek sluit niet uit, dat ik ten aanzien van een aantal detailpunten en ten aanzien van de wijze van behandeling hier en daar bezwaren heb. Voorbeelden:

a. De uitspraak, dat de snelheid de weg is afgelegd in de tijdseenheid (blz. 8), vereist correctie.
b. De auteurs nemen op blz. 10 aan, dat de leerlingen bekend zijn met de binomiale ontwikkeling. Deze komt voor in de eerste toepassing van het boek, waarin t^n gedifferentieerd wordt. Het lijkt me didactisch aan te bevelen eenvoudiger toepassingen met concreet cijfermateriaal te laten voorafgaan.
c. In § 2 tonen de schrijvers aan, dat de beweging eenparig is, als de bewegingsvergelijking van de eerste graad is. Onmiddellijk daarna passen ze echter de omkering van deze stelling toe. Analoge bezwaren zijn aan te voeren tegen de behandeling van de eenparig versnelde beweging.
d. De auteurs behandelen vier eenhedenstelsels. Het is me niet duidelijk, waarom ze het praktische stelsel (het m.kg.s.-stelsel), waaraan ze toch ook zelf de voorkeur blijken te geven, in een opmerking introduceren (blz. 20).
e. De auteurs definiëren de harmonische trilling door de bewegingsvergelijking $s_t = r.\sin \omega t$ en beperken daardoor de toepassingsmogelijkheid van de door hen gegeven theorie.
f. Waarom houden de auteurs zich niet consequenter aan de zogenaamde „voorkeurspelling"? Ze schrijven produkt en praktisch niet met een k en parallellogram met één l te weinig. Ze gebruiken voorts verscheiden malen het germanisme „meerdere". Op blz. 176 wordt gesproken over „hoeveelheid van beweging" Het woordje „van" dient te vervallen.

De uiterlijke verzorging van het boek laat niets te wensen over.

Joh. H. Wansink

Kurt-R. Biermann, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, *Dokumente für sein Leben und Wirken* (Zum 100. Todestag), Akademie-Verlag, Berlin1959, D.M. 10.50.

Op 5 mei 1859 overleed te Göttingen op vierenvijftigjarige leeftijd Gustav Lejeune Dirichlet, enkele dagen voor het verscheiden van een andere grote Duitser wiens vriend hij jarenlang geweest was: Alexander von Humboldt. Deze laatste was het die de jonge Rijnlander na zijn Parijse tijd introduceerde bij Arago en Sturm, waarna Dirichlet een leeropdracht ontving aan de universiteit van Breslau.

Ter gelegenheid van Dirichlets honderdste sterfdag verzamelde Biermann een hoeveelheid brieven en stukken die betrekking hebben op leven en werken van deze begaafde mathematicus. Wij volgen Dirichlet van Breslau naar Berlijn, waar hij doceert aan de Allgemeinen Kriegsschule en aan de Berlijnse universiteit en later naar Göttingen waar hij Gauss opvolgt. We nemen kennis van de briefwisseling tussen faculteitsbesturen en regeringsfunctionarissen over de vermakelijke, maar voor Dirichlet wellicht benauwende problemen rondom zijn steeds maar uitgestelde Latijnse voordracht, welke tenslotte in 1851 plaatsvond. Wij lezen van persoonlijke contacten met vele dragers van roemruchte namen als Legendre, Weber, C. G. J. Jacobi, Schläfli en J. Steiner, om er maar enkele te noemen, van zijn huwelijk met Rebecka Mendelssohn-Bartholdy (zuster van de beroemde Felix) en zijn jarenlange strijd om salarisverbetering.

Maar bovenal krijgen we een overzicht van 's mans wetenschappelijke publikaties, gehouden voordrachten en academische colleges; in aantal betrekkelijk gering, maar — zoals Gauss eens gezegd heeft — ,,Juwele wägt man nicht mit der Krämerwaage".

De lijst van behandelde onderwerpen is indrukwekkend genoeg; niet alleen getallentheorie en integraalrekening, doch ook onderwerpen uit de theoretische mechanica, elektriciteitsleer en de leer der continue media.

Zeer lezenswaard zijn de meningen van tijdgenoten over de geleerde en over de mens Dirichlet. Zo zegt Jacobi van hem dat hij (Dirichlet) alleen weet wat een volkomen streng bewijs is. En Crelle stelt de ruwe, onbehouwen, tactloze Steiner tegenover de gereserveerde, beschaafde, fijnzinnige Dirichlet.

Biermann toont ons de fguur van Lejeune Dirichlet als lid van de samenleving en als man van de wetenschap tegen de boeiende achtergrond van denkers en gedachten van zijn tijd. Zonder te bogen op volledigheid wil deze verzameling een begin maken met een nauwkeuriger onderzoek van de wetenschapshistorie van de eerste helft der negentiende eeuw.

Een goed begin, dunkt mij. Van Wely

Anschauliche Mathematik, II Teil, Endliche Gruppen von Herbert Noack. Verlag Ferdinand Hert, Kiel 1960, 164 Seiten DM 13.50.

Bovengenoemd boekje is geen leerboek over de groepentheorie, doch meer een overzicht van ,,wat men met groepen kan doen" om de verstarring van het meetkunde onderwijs in Euclidische zin te doorbreken.

De eerste vijftig bladzijden worden besteed om met vele voorbeelden, ik noem slechts: als groep van zes elementen de wortels van $2^6 = 1$ (in wezen dus een groep van rotaties), de restklassen 1, 2, 4, 5, 7 en 8 (mod. 9), de zes waarden van de dubbelverhouding $(ABCD)$, een groep bestaande uit een zestal matrices, de definitie van een groep vast te stellen, isomorfie van groepen duidelijk te maken, het begrip ,,produkt" te generaliseren, waarbij de ,,elementen" niet noodzakelijk meer getallen zijn en de commutatieve eigenschap niet meer vanzelfsprekend is.

Doordat slechts eindige groepen besproken worden komt het gesloten karakter van een groep goed tot zijn recht. Via groepentafels blijken dan permutaties geschikte elementen te zijn om een groep te bestuderen. Met behulp van deze voorbeelden worden dan eigenschappen ontdekt en geformuleerd.

Aan het eind worden eenvoudige ornamenten onderzocht, waarbij een 90-tal voorbeelden als oefenmateriaal wordt aangeboden.

Of deze voorbeelden, gezien het huidige wiskunde programma, voor verwezenlijking in ons onderwijs bruikbaar zijn? Voor hen die nieuwe ideeën willen opdoen een prettig boek.

Burgers

FILMSTRIPS

Bruno Ernst en A. J. Poelman, . . . *en dat alles met de constructie Z.H.Z.* Polygoon filmstrip, K510. Prijs *f* 13.50; uitgevoerd in kleuren.

Deze filmstrook is tot stand gekomen in samenwerking met de Commissie Film en Filmstrook van de wiskunde-werkgroep van de W.V.O. Het hoofdthema van de film is de bepaling van afstanden in de praktijk door middel van driehoeken, waarvan men een zijde en de beide aanliggende hoeken door meting kent. Allereerst zien we een huis op een eiland, waarvan we de afstand tot de vaste wal willen weten. Twee waarnemers meten de hoeken tussen hun verbindingslijn en de richting van hen naar het huis. De afstand van de waarnemers is bekend. Door de driehoek op verkleinde schaal na te tekenen, kunnen dan de afstanden van de waarnemers tot het huis door meting gevonden worden. Dan zien we op zeer duidelijke wijze een instrument toegelicht om hoeken te meten, de theodoliet. Op hetzelfde thema voortbordurend worden nu een serie afstanden gemeten: de afstand van een schip tot de kust, de hoogte van een toren, de afstand van een schip tot de kust gemeten vanuit een vuurtoren, de hoogte van een boom, de hoogte van de onderkant van een wolk, de hoogte van een kunstmaan, de afstand van een ster. Men behoeft niet bevreesd te zijn voor eentonigheid; de metingen worden op een dergelijke wijze gepresenteerd, dat de aandacht geboeid blijft. Tot slot volgt een serie beelden met het omgekeerde doel: gegeven is een kaart van een te ontginnen gebied (i.c. Oost-Flevoland) en gevraagd wordt in het gebied de punten te vinden, die corresponderen met bepaalde punten op de kaart.

Deze filmstrook is bijzonder instructief. Zij biedt ons de mogelijkheid om in een enkel lesuur de leerlingen van de eerste klasse te laten zien, dat wiskunde niet alleen een theoretische wetenschap is, maar ook zeer bruikbaar als hulpmiddel voor de praktijk. Direct na ontvangst heb ik de strook op school vertoond. Het resultaat was in alle opzichten positief: de leerlingen bleven het gehele uur geboeid luisteren en vertelden mij later, dat zij er met veel plezier naar gekeken hadden.

We mogen de heren Bruno Ernst en Poelman wel dankbaar zijn voor het zeer vele werk, dat zij gedaan hebben om ons onderwijs met een dergelijk nuttig hulpmiddel te verrijken.

Drs. L. Bakema, *Grafieken (punt en rechte lijn)*. Polygoon filmstrip, 511. Prijs *f* 5.00.

De strip geeft een serie beelden over grafieken van lineaire vergelijkingen. Sommige beelden dienen ter verduidelijking van de theorie. Verscheidene keren is echter een opgave in beeld gebracht. Men krijgt dan b.v. alleen een assenkruis en een verdeling van het platte vlak in vierkantjes te zien met het verzoek punten met gegeven coördinaten aan te wijzen of een lijn te tekenen, waarvan de vergelijking gegeven is. De projectie kan bij daglicht op een zwart bord geschieden, omdat de achtergrond van de figuren zwart is en de lijnen en punten in wit verschijnen.

Het is mij niet recht duidelijk, wat deze strip kan bijdragen tot een beter begrip van het hoofdstuk grafieken. De beelden, die de theorie verduidelijken, kan iedere leraar gemakkelijk zelf op het bord tekenen en hij zal dit zonder twijfel moeten doen, als hij de theorie uitlegt. Het maken van vraagstukken op de aangegeven manier lijkt mij niet doelmatig.

A. C. Barrett, *Inleiding tot grafieken*. Polygoon filmstrip, 512. Prijs *f* 5.00.

Deze strip beoogt niet, zoals de voorgaande, een vervanging van figuren, die anders toch getekend moeten worden, maar een verduidelijking van het begrip grafiek van een functie door het geven van talrijke praktische toepassingen. Dat met twee coördinaatassen gewerkt wordt, behoeft geen bezwaar te zijn voor die leraren, die er de voorkeur aan geven bij eerste kennismaking de „Y-as" te mijden.

We zien b.v. eerst een jongen op verschillende leeftijden en dus met telkens andere lengte, daarna de afbeeldingen van deze jongen naast elkaar geplaatst gerangschikt naar de leeftijd, dan de bovenste punten van deze afbeeldingen door een lijn verbonden en ten slotte alleen deze lijn, die dan de grafiek is van de groeifunctie. Een aantal beelden dient om onregelmatigheden in grafieken te constateren en deze in verband te brengen met storende oorzaken. Zo zien we een grafiek van het gewicht als functie van de leeftijd met een plotselinge daling ten gevolge van ziekte, een grafiek van de snelheid van een motorfiets met onregelmatigheden ten gevolge van het overschakelen. Andere beelden bieden gelegenheid tot extrapolatie van waarnemingsreeksen, b.v. de grafiek van een temperatuurverloop. Ook worden in één figuur grafieken van twee functies (snelheidsfuncties of groeifuncties) weergegeven, waardoor men de gelegenheid krijgt uit de figuur het verband tussen deze beide functies af te lezen (wie groeit harder?, wanneer waren beide even lang?). Ook vindt men toepassingen op het gebied van verkeersongevallen, gasverbruik. Ten slotte moet nog vermeld worden, dat de strip de mogelijkheid opent zelf een functie op te stellen, nl. de beeldgrootte als functie van de afstand van projector tot scherm en hiervan dan een grafiek te maken. Dit is het enige onderdeel van de strip, waar ik enigszins sceptisch tegenover sta. Overigens lijkt mij deze strip waardevol als verduidelijking van het begrip functie en het begrip grafiek en ook als middel om de leerlingen ervan te doordringen, dat wiskunde met het praktische leven in verband staat.

P. G. J. Vredenduin

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Jan Huitzingstraat 43, Hoogezand

VOORDRACHTEN MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „Actualiteiten", in „Krasnapolsky", Warmoesstraat 173—199, Amsterdam, op zaterdag 26 november 1960:

Dr. C. G. Lekkerkerker: „Een eigenschap van matrices". Aanvang 14,00 uur.

In de serie „Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht", in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op woensdag 7 december 1960:

Prof. J. J. de Jongh: „De natuurlijke getallen en de axioma's van Peano". Aanvang 20,00 uur.

WIMECOS

VOORLOPIGE AGENDA VAN DE ALGEMENE VERGADERING

van de Vereniging van leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie (Wimecos) op *woensdag* 28 *december* 1960 in *„Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht.*

Aanvang 10,30 uur.

(„Esplanade" is vanaf het station met stadsbus lijn 2 te bereiken)

1. Opening door de voorzitter Dr. Joh. H. Wansink.
2. Notulen van de algemene vergadering van 29 december 1959 (gepubliceerd in het oktobernummer van „Euclides".)
3. Jaarverslagen:
   a) van de secretaris (in dit nummer)
   b) van de penningmeester
   c) van de kascommissie (in dit nummer)
   d) van de redaktie van „Euclides" (in dit nummer).
   e) van de commissie voor de leesportefeuille.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing, wegens periodieke aftreding van de heren H. G. Brinkman en J. F. Hufferman.
   Het bestuur stelt de volgende dubbeltallen voor:
   a. in de vacature-Brinkman: 1. Dr. Ir. B. Groeneveld
   2. A. M. Koldijk
   b. in de vacature-Hufferman: 1. J. F. Hufferman
   2. H. van Wely.
6. Voorstel van het bestuur tot wijziging van het huishoudelijk reglement. (zie dit nummer van „Euclides").
7. Wetenschappelijke voordracht door Prof. Dr. S. C. van Veen te Delft.

PAUZE

in de middagvergadering, aanvangend ± 14,15 uur:

8. Voordracht van dr. L. N. H. Bunt te Utrecht.
9. Rondvraag.
10. Sluiting.

N.B. Deze mededeling geldt tevens als voorlopige convocatie voor de leden van Wimecos. Deze kunnen tot uiterlijk 1 december a.s. nieuwe agendapunten voorstellen bij de secretaris, Charlotte de Bourbonlaan 64, Zeist.

Namens het bestuur van Wimecos
De secretaris.

JAARVERSLAG
over het verenigingsjaar 1 september 1959—31 augustus 1960

Aan het einde van het verslagjaar telde WIMECOS 510 leden en drie ereleden. Het aantal leden ging met 15 vooruit.

De jaarvergadering werd op 29 december 1959 te Utrecht in „Esplanade" gehouden. De aftredende bestuursleden C. J. Alders en dr. P. G. J. Vredenduin werden bij acclamatie herkozen.

In de ochtendvergadering trad als spreker op prof. dr. R. Timman te Delft, die sprak over: „Moderne ontwikkelingen in de toegepaste wiskunde". De middagvergadering was gewijd aan een bespreking van het rapport van de nomenclatuurcommissie; dit rapport werd met enige wijzigingen aangenomen. Op 25 april 1960 werd te Utrecht het dertiende congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen gehouden. Zoals bekend wordt dit congres om de twee jaar georganiseerd door alle verenigingen van leraren in de exacte vakken. De wiskundesectie stond onder leiding van de voorzitter van WIMECOS.

Op 29 en 30 augustus werd weer de vacantiecursus voor wiskundeleraren, te Amsterdam gehouden. Deze cursussen worden jaarlijks door het Mathematisch Centrum georganiseerd, geadviseerd door een commissie waarvan de voorzitter van WIMECOS voorzitter is.

Het bezoek was goed, maar leek iets minder dan vorige jaren te zijn. Het feit dat enige andere lerarenorganisaties ongeveer in dezelfde tijd vergaderden was hierop misschien van invloed. Of speelde de Plantaziekte hierbij een rol?

Door de Raad van Leraren is een commissie ingesteld — de z.g. commissie van tien — ten einde een nadere uitwerking van het aanhangige wetsvoorstel voor het V.H.M.O. voor te bereiden. Ook WIMECOS werd om advies gevraagd en heeft een uitvoerig antwoord ingezonden. Met de zusterverenigingen werd contact opgenomen, dat resulteerde in een beraad met VELINES. In dit stadium moet met deze vermelding volstaan worden.

Ten slotte nog een aantal korte vermeldingen:

Het bestuur vergaderde in de verslagperiode 4 keer; de nomenclatuurcommissie tweemaal en de leerplancommissie één maal.

De „250 Opgaven" werden tweemaal herdrukt.

Ook dit jaar was er weer dezelfde goede verhouding met de zusterorganisaties als in de vorige jaren.

BESTUURSVOORSTEL
tot wijziging van het Huishoudelijk Reglement.

Het bestuur stelt voor:

I. In art. 9 luidende: Tenminste vier weken voor de jaarlijkse ledenvergadering deelt de secretaris aan de leden mede, waar en wanneer zij gehouden zal worden, welke bestuursleden na de vergadering zullen aftreden en welke *dubbeltallen* het bestuur voor de open plaatsen stelt. Wenst een lid een aangelegenheid onder de agenda opgenomen te zien, dan moet hij dit, binnen veertien dagen na dagtekening van bedoelde mededeling aan de secretaris berichten. Wenst een vijftal leden een kandidaat te stellen voor een open plaats in het bestuur, dan moet die opgave binnen dezelfde termijn door de secretaris zijn ontvangen, het woord „dubbeltallen" te vervangen door „kandidaten".

II. Art. 13 luidende: In de jaarlijkse ledenvergadering wordt vastgesteld waar de volgende jaarlijkse ledenvergadering wordt gehouden, te doen vervallen.

VERSLAG

van de kascommissie over het verenigingsjaar 1959—1960

Groningen, 15 september 1960

Aan het bestuur van WIMECOS

Wij hebben de boeken van de penningmeester gecontroleerd en in uitstekende orde bevonden. Naar onze mening kan de penningmeester worden gedechargeerd onder dankzegging voor het vele werk, dat hij in het belang van de vereniging heeft verricht.

w.g. W. F. Brandenburg
H. W. Lenstra

VERSLAG

van de redactie van Euclides over de 35e jaargang (1959—1960)

Aan de Besturen van
,,Wimecos" en ,,Liwenagel"

Over de werkzaamheden van de redactie van ,,Euclides" gedurende de 35e jaargang van het blad vallen weinig bijzondere opmerkingen te maken.

De samenwerking tussen alle betrokkenen, redactieleden, uitgever, besturen en auteurs, was evenals vorige jaren uitstekend. Dank zij die goede samenwerking met de uitgever kon elk nummer op tijd verschijnen. Gaarne willen wij dit hier in het bijzonder melden.

Aan het eind van de vorige jaargang moest de secretaris de heer H. W. Lenstra, zijn functie helaas neerleggen. Het is hier de plaats om de heer Lenstra te danken voor de vele werkzaamheden, die hij gedurende de drie jaren dat hij het secretariaat vervulde, voor Euclides verrichtte. Zijn wijze van indeling en zijn voorbereiding van het werk waren zo nauwgezet, dat de overname van het secretariaat zonder discontinuïteiten kon geschieden. De redactie prijst zich gelukkig, dat zij de heer Lenstra in haar midden heeft kunnen behouden en de secretaris is dankbaar voor de goede adviezen, die hij geregeld van hem mocht ontvangen.

Aan copie was ook nu geen gebrek. Sommige auteurs moesten daardoor lang op publikatie van hun artikelen wachten. Het gehalte van de aangeboden artikelen was zodanig dat slechts enkele malen een bijdrage moest worden geweigerd. Helaas werden de toegezegde teksten van enkele belangrijke voordrachten niet ontvangen.

De omvang van de jaargang was 336 pagina's, 16 meer dan normaal.

Namens de redactie van ,,Euclides",

Dr. JOH. H. WANSINK, *voorzitter*
A. M. KOLDIJK, *secretaris*

MEDEDELING VAN DE REDACTIE

Het is de Redactie te laat gebleken, dat het Probleem van Lehmus, waar de heer R. Kooistra in de 35e jaargang van Euclides (blz. 331 e.v.) een artikel aan wijdde, ook reeds werd behandeld door Prof. Dr. O. Bottema in de 23e jaargang (blz. 5 e.v.). Helaas werd het tweede artikel voor een deel een herhaling van het eerste.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie aangaande deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

35. Van een onbekend getal, kleiner dan 1000, worden de resten a, b en c gegeven, die het oplevert bij deling resp. door 7, 11 en 13. Het getal terug te vinden.

36. Knip lange papieren stroken en plak van elke strook de uiteinden aaneen. Leg evenwel van te voren in de tweede band 1 halve slag, in de tweede 2 halve slagen, enz. Knip nu de stroken overlangs door. Men verkrijgt dan beurtelings één strook of twee stroken. (In het geval, dat men 1 halve slag heeft aangebracht, krijgt men de ring van Möbius). Als U het probeert, krijgt U al gauw een chaos van krinkels. Er wordt nu gevraagd in deze chaos orde te scheppen en op overzichtelijke manier weer te geven, wat voor figuur men in het algemeen krijgt. Over de halve slagen hoeft U niets meer te zeggen, want hoeveel er zijn, is al gegeven.

OPLOSSINGEN

(Zie voor de opgaven het vorige nummer)

33. Voorlopig veranderen we de opgaaf en schrijven geboortestop voor na geboorte van twee opvolgende kinderen van hetzelfde geslacht. Vanwege de symmetrie komen er dan evenveel jongens als meisjes ter wereld. In de helft van de gevallen, nl. als de laatste twee kinderen meisjes zijn, moet het proces worden voortgezet. Bij deze voortzetting stellen we weer de eis, dat het proces gestaakt wordt na geboorte van twee opvolgende kinderen van hetzelfde geslacht. De voortzettingen bevatten dan evenveel jongens als meisjes. Nu moet in $\frac{1}{4}$-deel van het oorspronkelijk aantal het proces nog worden voortgezet. Deze voortzettingen bevatten weer evenveel jongens als meisjes, als we weer de dubbelgelijkseksstop stellen. Enz. In totaal worden toch dus evenveel jongens als meisjes geboren.

En nu geeft de dictator het op. Terecht!

(De vorige puzzel laat langs deze weg een veel eenvoudiger oplossing toe dan in het vorige nummer gepubliceerd werd. De aardigheid was echter van deze opgaaf af geweest, als direct de korte oplossing gepubliceerd was.)

34. Men kan door middel van onbepaalde vergelijkingen de oplossing vinden. Door systematisch proberen gaat echter vlugger. Men vindt, dat in elk hoekpunt samenkomen (a^b betekent b a-hoeken):

3^6		
3^3	4^2	
3^2	4^1	15^1
4^4		
5^2	12^1	
8^2	4^1	
15^2	3^1	
3^1	8^1	36^1
3^1	10^1	20^1
3^1	12^1	18^1
4^1	5^1	24^1

Hierin mag overal 3^2 nog door 6^1 worden vervangen.